# Pentatic Mathematics Competition II
# Jenjang SMP/MTs

LORD PENTA

9 April 2020

## §1 Soal

**Petunjuk :** Kerjakan soal-soal berikut dengan jujur agar mendapatkan manfaat yang maksimal. Jawaban setiap soal dipastikan bilangan cacah. Jawab soal-soal berikut tanpa menuliskan satuan, koma (,), dan lain-lain.

1. Tentukan angka satuan dari
$$2 + 22 + 222 + 2222 + \cdots + \underbrace{222\cdots222}_{\text{sebanyak } 1234^3}$$
**(1 poin)**

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

2. Jika $x^2 + x + 1 = 0$, tentukan nilai
$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots + x^{2021}$$
**(2 poin)**

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

3. Tentukan banyak pasangan bilangan asli $(x, y)$ sehingga $xy = 2020^6$ dimana pasangan $(x, y)$ dan $(y, x)$ tidak dibedakan. **(1 poin)**

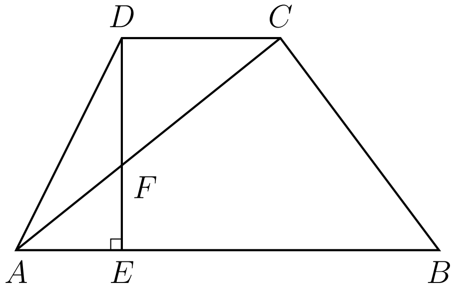
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

4. Wildan dan Bagus masing-masing akan melempar tiga buah bola basket ke dalam *ring*. Wildan dan Bagus memiliki peluang yang sama untuk berhasil memasukkan sebuah bola ke dalam *ring* tersebut. Misalkan $p$ adalah peluang Wildan berhasil memasukkan tepat 2 bola dan misalkan $q$ adalah peluang Bagus berhasil memasukkan tepat 3 bola. Jika $\dfrac{p}{q} = \dfrac{3}{2}$ dan peluang Wildan gagal memasukkan sebuah bola ke dalam ring tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk pecahan sederhana $\dfrac{a}{b}$, tentukan nilai $10a + b$.

   *Catatan :* Suatu pecahan $\dfrac{a}{b}$ dikatakan *sederhana* jika $a$ dan $b$ bilangan bulat dengan $FPB(a, b) = 1$. **(2 poin)**

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

5. Bangun $ABCD$ adalah trapesium dengan $AB$ sejajar $CD$. Titik $E$ terletak pada $AB$ sehingga $AB$ tegak lurus $DE$. Diagonal $AC$ memotong $DE$ di titik $F$. Diketahui bahwa panjang $CD = 15, AB = 29, AD = 10$, dan panjang $BC = 8\sqrt{2}$. Jika luas $EBCF$ dapat dinyatakan dalam bentuk pecahan sederhana $\frac{a}{b}$, tentukan nilai $a + b$. **(3 poin)**

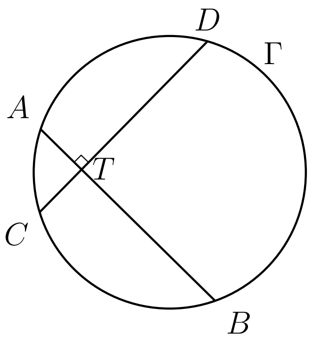



. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

6. Tentukan banyak segiempat talibusur yang memiliki panjang sisi bilangan asli berurutan serta salah satu diagonalnya merupakan diameter lingkaran luarnya. **(1 poin)**

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

7. Talibusur $AB$ dan $CD$ dari lingkaran $\Gamma$ saling tegak lurus dan berpotongan di $T$. Jika $AT^2 + BT^2 = 3312$ dan $CT^2 + DT^2 = 3088$, tentukan jari-jari lingkaran $\Gamma$.




**(3 poin)**

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

8. Tentukan banyak pasangan bilangan bulat tak negatif $(a, b, c, d)$ sehingga $a+b+c+d \leq 15$ dimana $a \geq 3$ dan $b \leq 4$. **(2 poin)**

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

9. Diberikan persegi $ABCD$. Titik $P$ terletak di dalam persegi $ABCD$ sehingga panjang $PC = 2020, PD = 1010\sqrt{6}$, dan panjang $PB = 1010\sqrt{2}$. Tentukan besar $\angle APB$ dalam derajat.

**(3 poin)**

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

10. Tentukan bentuk paling sederhana dari

$$\sqrt{14} + \sqrt{7 + 2\sqrt{6}} - \frac{10}{\sqrt{5}} \times \sqrt{1 + \frac{\sqrt{21}}{5}}$$

**(1 poin)**

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

11. Misalkan $f_n$ menyatakan faktor persekutuan terbesar dari $\underbrace{111\cdots111}_{\text{sebanyak } 2020}$ dan $\underbrace{111\cdots111}_{\text{sebanyak } n}$ untuk setiap bilangan asli $n$. Tentukan banyak bilangan asli $n$ yang kurang dari 2020 sehingga $f_n > 1$. **(4 poin)**

.......................................................................................

12. Tentukan banyak pasangan bilangan bulat berbeda tak nol $(x, y)$ yang memenuhi

$$x + \frac{1}{y} = y + \frac{1}{x}$$

**(1 poin)**

.......................................................................................

13. Sebanyak 3 bilangan berbeda diambil dari himpunan $\{2000, 2001, 2002, 2003, \cdots, 2020\}$. Jika peluang bahwa hasil kali ketiga bilangan tersebut tidak habis dibagi 9 dapat dinyatakan dalam bentuk pecahan sederhana $\frac{a}{b}$, tentukan nilai $a + b$.

**(2 poin)**

.......................................................................................

14. Suatu bilangan asli $x$ dikatakan *mantap* jika

$$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\cdots}}}}+\sqrt{x-\sqrt{x-\sqrt{x-\sqrt{x-\cdots}}}}$$

bilangan asli. Tentukan banyak bilangan asli $x$ yang mantap dengan $1 \leq x \leq 2020$.

**(3 poin)**

.......................................................................................

15. Tentukan nilai dari

$$\frac{\frac{1}{1}+\frac{1}{2}}{\frac{1}{1}-\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}+\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}+\cdots+\frac{\frac{1}{2019}+\frac{1}{2020}}{\frac{1}{2019}-\frac{1}{2020}}$$

**(2 poin)**

.......................................................................................

16. Diberikan $a, b, c, d$ memenuhi sistem persamaan

$$\begin{aligned} 2ab + a + b &= 2 \\ 2bc + b + c &= 1 \\ 2cd + c + d &= 4 \end{aligned}$$

Tentukan nilai dari $2ad + a + d$. **(1 poin)**

.......................................................................................

17. Diberikan segitiga $ABC$ serta titik $D$ dan $E$ berturut-turut berada pada sisi $BC$ dan $AC$. Titik $F$ merupakan perpotongan $BE$ dan $AD$. Misalkan $[ABC]$ menyatakan luas segitiga $ABC$. Didefinisikan serupa untuk $[ABE], [BAD], [BFD]$, dan $[ABF]$. Jika $5[BEC] = 2[ABE] \times [ABC]$ dan nilai dari $\dfrac{[ABF] \times [BAD]}{[BFD]}$ dapat dinyatakan dalam bentuk pecahan sederhana $\frac{a}{b}$, tentukan nilai $10a + b$. **(4 poin)**

.......................................................................................

18. Tentukan banyak bilangan bulat $x$ sehingga $\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$ bilangan bulat. **(2 poin)**

   . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

19. Tentukan tiga digit terakhir dari

$$\frac{1^3+2^3}{1^2-1\cdot 2+2^2}+\frac{2^3+3^3}{2^2-2\cdot 3+3^2}+\frac{3^3+4^3}{3^2-3\cdot 4+4^2}+\cdots+\frac{2019^3+2020^3}{2019^2-2019\cdot 2020+2020^2}$$

   **(3 poin)**

   . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

20. Diberikan fungsi $f(m,n)$ dengan

$$f(m,n)=\frac{m^{n^2}-m^{(n-2)^2}}{\left(m^{2n-2}+1\right)\left(m^{n-1}+1\right)\left(m^{n-1}-1\right)}$$

   untuk setiap bilangan asli $m$ dan $n$. Tentukan angka satuan dari

$$f\big(2022, f(2019,2017)\big)+f\big(f(2018,2020),2019\big)$$

   *Catatan :* Perhatikan bahwa $a^{b^c}=a^{(b^c)}$. Sebagai contoh, $3^{2^3}=3^8$ dan $4^{3^2}=4^9$. **(4 poin)**

   . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**Total Peserta : 78 peserta**

# §2 Solusi

1. Tentukan angka satuan dari

$$2 + 22 + 222 + 2222 + \cdots + \underbrace{222\cdots222}_{\text{sebanyak } 1234^3}$$

**(1 poin)**

**Jawab:** $\boxed{8}$

Tinjau modulo 10.

$$\begin{aligned} 2 + 22 + 222 + 2222 + \cdots + \underbrace{222\cdots222}_{\text{sebanyak } 1234^3} &\equiv \underbrace{2+2+2+\cdots+2}_{\text{sebanyak } 1234^3} \pmod{10} \\ &\equiv 2\cdot 1234^3 \pmod{10} \\ &\equiv 2\cdot 4^3 \pmod{10} \\ &\equiv 128 \pmod{10} \\ &\equiv 8 \pmod{10} \end{aligned}$$

Demikian angka satuannya adalah $\boxed{8}$.

> **Remark.** Sebanyak 62 peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Demikian tingkat kesulitan soal ini adalah **sangat mudah**. Untuk menentukan angka satuan, kita hanya perlu menentukan sisa pembagian operasi tersebut dengan 10 (atau dengan mengambil modulo 10).

2. Jika $x^2 + x + 1 = 0$, tentukan nilai

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots + x^{2021}$$

**(2 poin)**

**Jawab:** $\boxed{0}$

Perhatikan bahwa $x = 1$ tidak memenuhi. Kalikan kedua ruas dengan $(x-1)$ pada $x^2 + x + 1 = 0$ sehingga diperoleh

$$0 = (x-1)\left(x^2+x+1\right) = x^3 - 1 \Longrightarrow x^3 = 1$$

Dapat kita simpulkan bahwa

$$x^{3k} = 1, \quad x^{3k+1} = x, \quad x^{3k+2} = x^2$$

untuk setiap bilangan bulat tak negatif $k$. Kita peroleh

$$\begin{aligned} 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots + x^{2021} &= \frac{1\cdot\left(x^{2022}-1\right)}{x-1} \\ &= \frac{x^{2022}-1}{x-1} \\ &= \frac{\left(x^3\right)^{674}-1}{x-1} \\ &= \frac{1^{674}-1}{x-1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Jadi, $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots + x^{2021} = \boxed{0}$.

> **Remark.** Sebanyak 51 peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Demikian tingkat kesulitan soal ini adalah **sangat mudah**. Ide penyelesaiannya yaitu dengan meninjau bentuk
> $$a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$$
> seperti pada solusi yang disajikan.

3. Tentukan banyak pasangan bilangan asli $(x, y)$ sehingga $xy = 2020^6$ dimana pasangan $(x, y)$ dan $(y, x)$ tidak dibedakan. **(1 poin)**

   **Jawab:** $\boxed{\mathbf{319}}$

   Andaikan $(x, y)$ dan $(y, x)$ dianggap berbeda. Maka banyak pasangan bilangan asli $(x, y)$ adalah banyak faktor positif dari $2020^6 = 2^{12} \cdot 5^6 \cdot 11^6$, yaitu $(12+1)(6+1)(6+1) = 13 \cdot 7 \cdot 7 = 637$. Tinjau bahwa terdapat pasangan $(x, y)$ dimana $x = y$, yaitu $\left(2020^3, 2020^3\right)$. Sehingga banyak pasangan bilangan asli berbeda $(x, y)$ adalah $637 - 1 = 636$. Jika pasangan $(x, y)$ dan $(y, x)$ tidak dibedakan, maka kita perlu membaginya dengan $2! = 2$. Maka ada $\frac{636}{2} = 318$. Karena pasangan $(x, y) = \left(2020^3, 2020^3\right)$ belum terhitung, maka banyak pasangan $(x, y)$ yang memenuhi adalah $318 + 1 = \boxed{319}$.

   > **Remark.** Sebanyak 20 peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Demikian tingkat kesulitan soal ini adalah **sulit-sedang**. Ide penyelesaiannya adalah dengan menentukan terlebih dahulu banyak pasangan seluruhnya. Kemudian, dikurangi dengan banyak pasangan yang tidak sesuai syarat dengan soal. Hal ini juga sangat membantu daripada meninjau satu per satu secara manual dan dibutuhkan ketelitian yang lebih ekstra.

4. Wildan dan Bagus masing-masing akan melempar tiga buah bola basket ke dalam *ring*. Wildan dan Bagus memiliki peluang yang sama untuk berhasil memasukkan sebuah bola ke dalam *ring* tersebut. Misalkan $p$ adalah peluang Wildan berhasil memasukkan tepat 2 bola dan misalkan $q$ adalah peluang Bagus berhasil memasukkan tepat 3 bola. Jika $\frac{p}{q} = \frac{3}{2}$ dan peluang Wildan gagal memasukkan sebuah bola ke dalam ring tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk pecahan sederhana $\frac{a}{b}$, tentukan nilai $10a + b$.

   *Catatan :* Suatu pecahan $\frac{a}{b}$ dikatakan *sederhana* jika $a$ dan $b$ bilangan bulat dengan $FPB(a, b) = 1$. **(2 poin)**

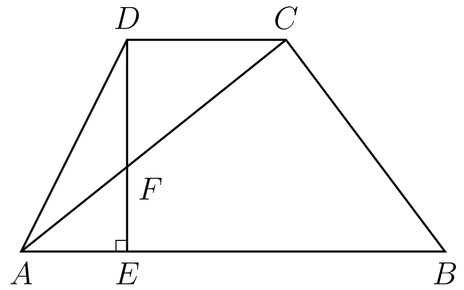
   **Jawab:** $\boxed{\mathbf{13}}$

   Misalkan peluang Wildan gagal memasukkan sebuah bola basket adalah $x$, demikian juga dengan Bagus. Maka peluang Wildan berhasil memasukkan sebuah bola basket adalah $(1 - x)$, demikian juga dengan Bagus. Peluang Wildan berhasil memasukkan tepat 2 bola adalah
   $$p = C_2^3 (1-x)^2 \cdot x = \frac{3!}{2!1!} x(1-x)^2 = 3x(1-x)^2$$
   Peluang Bagus berhasil memasukkan tepat tiga bola adalah
   $$q = C_3^3 (1-x)^3 x^0 = \frac{3!}{3!0!} (1-x)^3 \cdot 1 = (1-x)^3$$
   Karena $\frac{p}{q} = \frac{3}{2}$, maka
   $$\frac{3}{2} = \frac{3x(1-x)^2}{(1-x)^3} = \frac{3x}{1-x}$$

Dengan mengalikan silang, kita dapatkan $6x = 3 - 3x$ yang berarti $9x = 3$. Maka $x = \frac{1}{3}$. Kita peroleh $a = 1$ dan $b = 3$. Demikian $10a + b = \boxed{13}$.

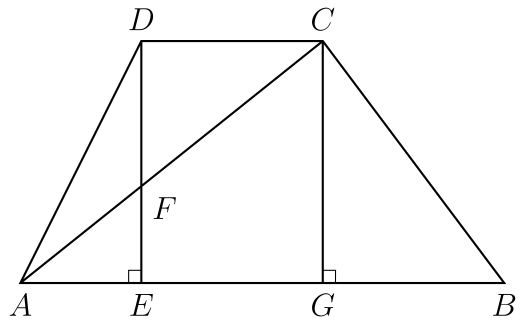
> **Remark.** Sebanyak 20 peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Demikian tingkat kesulitan soal ini adalah **sulit-sedang**. Soal semacam ini dapat memanfaatkan distribusi binomial.

5. Bangun $ABCD$ adalah trapesium dengan $AB$ sejajar $CD$. Titik $E$ terletak pada $AB$ sehingga $AB$ tegak lurus $DE$. Diagonal $AC$ memotong $DE$ di titik $F$. Diketahui bahwa panjang $CD = 15, AB = 29, AD = 10$, dan panjang $BC = 8\sqrt{2}$. Jika luas $EBCF$ dapat dinyatakan dalam bentuk pecahan sederhana $\frac{a}{b}$, tentukan nilai $a + b$. **(3 poin)**




**Jawab:** $\boxed{\textbf{771}}$

Misalkan garis tinggi dari $C$ ke $AB$ memotong di titik $G$.




Jelas bahwa panjang $EG = DC = 15$. Karena panjang $AB = 29$, maka $AE + GB = 14$. Misalkan panjang $GB = x$, demikian panjang $AE = 14 - x$. Tinjau dari $\triangle GBC$, menurut phytagoras kita peroleh

$$CG^2 = BC^2 - GB^2 = 128 - x^2$$

Tinjau dari $\triangle AED$, menurut phytagoras kita peroleh

$$DE^2 = AD^2 - AE^2 = 100 - (14 - x)^2$$

Tinjau bahwa panjang $CG = DE$. Demikian $128 - x^2 = 100 - (14 - x)^2$. Kita dapatkan

$$\begin{aligned} 28 &= x^2 - (14 - x)^2 \\ 28 &= (x + 14 - x)(x - 14 + x) \\ 28 &= 14(2x - 14) \\ 2 &= 2x - 14 \end{aligned}$$

yang memberikan $x = 8$. Demikian panjang $GB = 8$ dan $AE = 6$. Subtitusikan,

$$CG^2 = 128 - x^2 = 128 - 64 = 64 \Longrightarrow CG = 8$$

Tinjau bahwa $CG \parallel DE$ yang berarti $\triangle AGC$ sebangun dengan $\triangle AEF$. Kita peroleh

$$\frac{EF}{AE} = \frac{GC}{AG} \Longrightarrow EF = \frac{GC}{AG} \cdot AE = \frac{8}{21} \cdot 6 = \frac{16}{7}$$

Kita definisikan $[ABC]$ menyatakan luas $\triangle ABC$, $[AEF]$ menyatakan luas $\triangle AEF$, dan $[EBCF]$ menyatakan luas segiempat $EBCF$. Tinjau

$$\begin{aligned}
[EBCF] &= [ABC] - [AEF] \\
&= \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CG - \frac{1}{2} \cdot AE \cdot EF \\
&= \frac{1}{2} \cdot 29 \cdot 8 - \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \frac{16}{7} \\
&= 116 - \frac{48}{7} \\
&= \frac{812 - 48}{7} \\
[EBCF] &= \frac{764}{7}
\end{aligned}$$

Demikian $a = 764$ dan $b = 7$ yang berarti $a + b = \boxed{771}$.

> **Remark.** Sebanyak 26 peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Demikian tingkat kesulitan soal ini adalah **sedang**. Dalam soal geometri, membuat garis bantu sangat membantu serta membutuhkan manipulasi aljabar untuk mendapatkan suatu panjang sisi atau besar sudut yang belum diketahui.

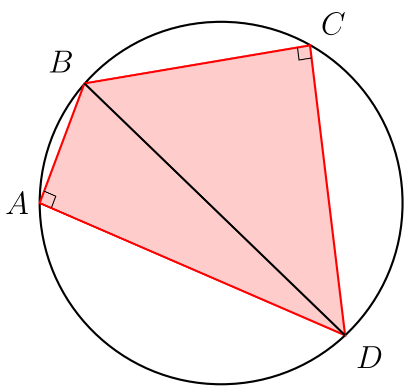
6. Tentukan banyak segiempat talibusur yang memiliki panjang sisi bilangan asli berurutan serta salah satu diagonalnya merupakan diameter lingkaran luarnya. **(1 poin)**

**Jawab:** $\boxed{\mathbf{0}}$

Tanpa mengurangi keumuman, misalkan diagonal $BD$ merupakan diameter lingkaran luar dari segiempat talibusur $ABCD$. Menurut hubungan sudut keliling sudut pusat, akibatnya

$$\angle DAB = \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ$$

Demikian pula $\angle BCD = 90^\circ$.




Tinjau $\triangle BAD$, menurut phytagoras berlaku

$$BD^2 = AB^2 + AD^2$$

Tinjau $\triangle BCD$, menurut phytagoras berlaku

$$BD^2 = BC^2 + CD^2$$

Dapat kita simpulkan bahwa $AB^2 + AD^2 = BC^2 + CD^2$. Misalkan panjang sisi dari segiempat talibusur tersebut adalah $x, x+1, x+2, x+3$ dengan $x$ bilangan asli.

a) Jika $AB = x, BC = x+1, CD = x+3$, dan $AD = x+4$, maka

$$\begin{aligned} x^2 + (x+4)^2 &= (x+2)^2 + (x+3)^2 \\ x^2 + x^2 + 8x + 16 &= x^2 + 4x + 4 + x^2 + 6x + 9 \\ 2x^2 + 8x + 16 &= 2x^2 + 10x + 13 \\ 3 &= 2x \\ x &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Tidak memenuhi.

b) Jika $BC = x, CD = x+1, DA = x+2$, dan $AB = x+3$, maka

$$(x+3)^2 + (x+2)^2 = x^2 + (x+1)^2$$

jelas tidak mungkin. Karena $x^2 < (x+2)^2$ dan $(x+1)^2 < (x+3)^2$ yang berakibat $(x+3)^2 + (x+2)^2 > x^2 + (x+1)^2$ yang berarti tidak mungkin terpenuhi.

c) Jika $AB = x, CD = x+1, BC = x+3$, dan $AD = x+2$, maka

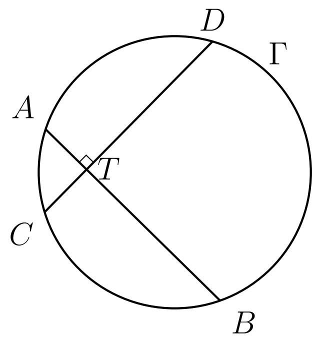
$$(x+1)^2 + (x+3)^2 = x^2 + (x+2)^2$$

Karena $x^2 < (x+1)^2$ dan $(x+2)^2 < (x+3)^2$, maka $(x+1)^2 + (x+3)^2 > x^2 + (x+2)^2$ yang berarti tidak mungkin terpenuhi.

Demikian banyak segiempat talibusur yang meemnuhi adalah $\boxed{0}$.

> **Remark.** Sebanyak 15 peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Demikian tingkat kesulitan soal ini adalah **sulit**. Kita manfaatkan suatu hal yang diketahui dalam soal dengan sebaik-baiknya yang dapat digunakan untuk menjawab soal tersebut. Selain itu, membagi beberapa kasus dari kemungkinan panjang segiempat talibusur tersebut juga diperlukan ketelitian agar tidak ada kasus yang tertinggal.

7. Talibusur $AB$ dan $CD$ dari lingkaran $\Gamma$ saling tegak lurus dan berpotongan di $T$. Jika $AT^2 + BT^2 = 3312$ dan $CT^2 + DT^2 = 3088$, tentukan jari-jari lingkaran $\Gamma$. **(3 poin)**



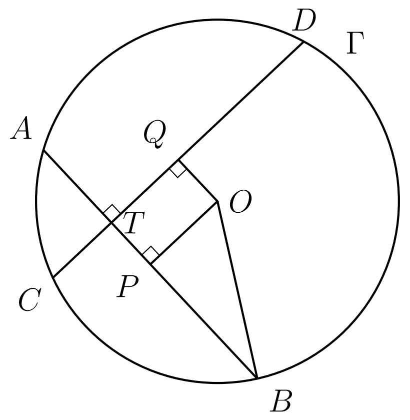

**Jawab:** $\boxed{40}$

Misalkan $O$ pusat lingkaran $\Gamma$. Misalkan juga titik $P$ dan $Q$ berturut-turut pada $AB$ dan $CD$ sehingga $OP \perp AB$ dan $OQ \perp CD$. Karena panjang $OA = OB$, akibatnya panjang $AP = PB$. Alasan yang serupa diperoleh panjang $DQ = QC$. Misalkan panjang $AT = a, TB = b, CT = c$, dan $TD = d$. Demikian

$$AP = PB = \frac{a+b}{2} \quad \text{dan} \quad DQ = QC = \frac{c+d}{2}$$

Perhatikan bahwa

$$QT = QC - CT = \frac{c+d}{2} - c = \frac{d-c}{2}$$




Perhatikan bahwa panjang $OP = QT = \dfrac{d-c}{2}$. Dengan phytagoras pada $\triangle BPO$, kita peroleh

$$OB^2 = PB^2 + OP^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{d-c}{2}\right)^2 = \frac{a^2+2ab+b^2}{4} + \frac{d^2-2dc+c^2}{4}$$

yang setara dengan

$$OB^2 = \frac{a^2+b^2+c^2+d^2+2ab-2cd}{4}$$

Menurut *Power Of Point*, berlaku

$$AT \cdot TB = CT \cdot TD \Longrightarrow ab = cd$$

Akibatnya $2ab - 2cd = 0$ sehingga

$$OB^2 = \frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4} = \frac{3312+3088}{4} = \frac{6400}{4} = 1600$$

yang berarti $OB = 40$. Demikian jari-jari lingkaran $\Gamma$ adalah $\boxed{40}$.

> **Remark.** Sebanyak 15 peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Demikian tingkat kesulitan soal ini adalah **sulit**. Secara umum, jika tali busur $AB$ dan tali busur $CD$ tegaklurus di $T$, berlaku
>
> $$R^2 = \frac{AT^2+BT^2+CT^2+DT^2}{4}$$
>
> dengan $R$ jari-jari lingkaran lingkaran luarnya. Teorema *Power Of Point* dapat dibuktikan dengan kesebangunan. Dari solusi tersebut, berlaku $AT \cdot TB = CT \cdot TD$. Sebagai latihan, buktikan bahwa $AT \cdot TB = CT \cdot TD$.

8. Tentukan banyak pasangan bilangan bulat tak negatif $(a,b,c,d)$ sehingga $a+b+c+d \leq 15$ dimana $a \geq 3$ dan $b \leq 4$. **(2 poin)**

   **Jawab:** $\boxed{\textbf{1490}}$

   Karena $a \geq 3$, misalkan $a = 3 + a'$ dengan $a'$ bilangan bulat tak negatif. Karena $a+b+c+d \leq 15$, misalkan terdapat bilangan bulat tak negatif $k$ sehingga $a+b+c+d = 15-k$ yang berarti $a+b+c+d+k = 15$. Kita peroleh bahwa $a'+b+c+d+k = 12$.

a) Jika $b = 0$, maka $a' + c + d + k = 12$ yang berarti ada

$$C_{4-1}^{12+4-1} = C_3^{15} = \frac{15!}{12!3!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 455$$

b) Jika $b = 1$, maka $a' + c + d + k = 11$ yang berarti ada

$$C_{4-1}^{11+4-1} = C_3^{14} = \frac{14!}{11!3!} = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 364$$

c) Jika $b = 2$, maka $a' + c + d + k = 10$ yang berarti ada

$$C_{4-1}^{10+4-1} = C_3^{13} = \frac{13!}{10!3!} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 286$$

d) Jika $b = 3$, maka $a' + c + d + k = 9$ yang berarti ada

$$C_{4-1}^{9+4-1} = C_3^{12} = \frac{12!}{8!3!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 220$$

e) Jika $b = 4$, maka $a' + c + d + k = 8$ yang berarti ada

$$C_{4-1}^{8+4-1} = C_3^{11} = \frac{11!}{8!3!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 165$$

Demikian total pasangan $(a, b, c, d)$ yang memenuhi adalah

$$455 + 364 + 286 + 220 + 165 = \boxed{1490}$$

> **Remark.** Sebanyak 5 peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Demikian tingkat kesulitan soal ini adalah **sangat sulit**. Soal semacam ini dapat memanfaatkan *De Moivre* atau *Star and Bar Theorem.* Secara umum, banyak pasangan bilangan bulat tak negatif $(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n)$ sehingga $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = k$ adalah
>
> $$C_{n-1}^{k+n-1} = \frac{(k+n-1)!}{k!(n-1)!}$$

9. Diberikan persegi $ABCD$. Titik $P$ terletak di dalam persegi $ABCD$ sehingga panjang $PC = 2020, PD = 1010\sqrt{6}$, dan panjang $PB = 1010\sqrt{2}$. Tentukan besar $\angle APB$ dalam derajat. **(3 poin)**

**Jawab:** $\boxed{\mathbf{105^\circ}}$

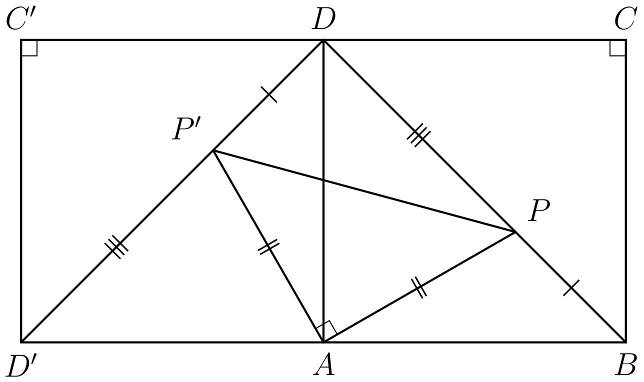
Menurut *British Flag Theorem*, berlaku $AP^2 + PC^2 = BP^2 + PD^2$. Hal ini kita peroleh

$$\begin{aligned} AP^2 &= BP^2 + PD^2 - PC^2 \\ &= 1010^2 \cdot 2 + 1010^2 \cdot 6 - 2020^2 \\ &= 1010^2 \cdot 8 - 1010^2 \cdot 4 \\ &= 1010^2(8-4) \\ &= 1010^2 \cdot 4 \\ &= 2020^2 \end{aligned}$$

yang berarti $AP = 2020$.

Rotasikan persegi $ABCD$ sebesar $90^\circ$ berlawanan arah jarum jam dengan pusat rotasi $A$, misalkan menghasilkan persegi $ADC'D'$. Perhatikan bahwa $\angle BAP = \angle DAP'$. Akibatnya,

$$\angle PAP' = \angle PAD + \angle DAP' = \angle PAD + \angle BAP = \angle BAD = 90^\circ$$




Tinjau bahwa panjang $AP = AP'$. Karena $\angle PAP' = 90^\circ$, akibatnya

$$\angle APP' = \angle AP'P = \frac{180^\circ - 90^\circ}{2} = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$$

Dengan phytagoras pada $\triangle PAP'$, maka

$$PP' = \sqrt{AP^2 + P'A^2} = \sqrt{2020^2 + 2020^2} = 2020\sqrt{2}$$

Tinjau juga bahwa

$$P'D^2 + DP^2 = 1010^2 \cdot 2 + 1010^2 \cdot 6 = 1010^2(2+6) = 1010^2 \cdot 8 = P'P^2$$

Karena $P'D^2 + DP^2 = P'P^2$, maka $\angle PDP' = 90^\circ$. Menurut sifat segitiga istimewa, kita peroleh bahwa $\angle DP'P = 60^\circ$. Tinjau bahwa

$$\angle APB = \angle DP'A = \angle DP'P + \angle AP'P = 60^\circ + 45^\circ = 105^\circ$$

Jadi, besar $\angle APB = \boxed{105^\circ}$.

> **Remark.** Sebanyak 8 peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Demikian tingkat kesulitan soal ini adalah **sangat sulit**. Ide penyelesaian soal ini adalah dengan bantuan rotasi. Alternatif solusi, karena panjang $AP = PC$ berarti titik $P$ terletak pada diagonal $BD$. Dengan mudah kita peroleh panjang sisi persegi $ABCD$. Bagi peserta yang telah mengenal aturan cosinus, dapat kita peroleh bahwa
>
> $$\cos \angle APB = \frac{AP^2 + PB^2 - AB^2}{2 \cdot AP \cdot PB} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$$
>
> yang menyimpulkan $\cos \angle APB = \cos 105^\circ$. Sehingga peserta tinggal membuktikan bahwa $\angle APB = 105^\circ$ adalah yang mungkin dari semua kemungkinan. Sebagai latihan, buktikan *British Flag Theorem* dengan bantuan menarik garis tinggi dari $P$ ke masing-masing sisi persegi.

10. Tentukan bentuk paling sederhana dari

$$\sqrt{14} + \sqrt{7 + 2\sqrt{6}} - \frac{10}{\sqrt{5}} \times \sqrt{1 + \frac{\sqrt{21}}{5}}$$

**(1 poin)**

**Jawab:** $\boxed{1}$

Tinjau bahwa $\sqrt{a + b + 2\sqrt{ab}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$. Maka

$$\sqrt{7 + 2\sqrt{6}} = \sqrt{6 + 1 + 2\sqrt{6 \cdot 1}} = \sqrt{6} + \sqrt{1} = \sqrt{6} + 1$$

Tinjau

$$\begin{aligned}
\frac{10}{\sqrt{5}} \times \sqrt{1+\frac{\sqrt{21}}{5}} &= \frac{10}{\sqrt{5}} \times \sqrt{\left(1+\frac{\sqrt{21}}{5}\right) \times \frac{10}{10}} \\
&= \frac{10}{\sqrt{5}} \times \sqrt{\frac{10+2\sqrt{21}}{10}} \\
&= \frac{10}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{10+2\sqrt{21}}}{\sqrt{10}} \\
&= \frac{10\sqrt{7+3+2\sqrt{7\cdot 3}}}{\sqrt{50}} \\
&= \sqrt{2}\big(\sqrt{7}+\sqrt{3}\big) \\
\frac{10}{\sqrt{5}} \times \sqrt{1+\frac{\sqrt{21}}{5}} &= \sqrt{14}+\sqrt{6}
\end{aligned}$$

Demikian

$$\sqrt{14}+\sqrt{7+2\sqrt{6}}-\frac{10}{\sqrt{5}} \times \sqrt{1+\frac{\sqrt{21}}{5}} = \sqrt{14}+\sqrt{6}+1-\big(\sqrt{14}+\sqrt{6}\big) = \boxed{1}$$

**Remark.** Sebanyak 40 peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Demikian tingkat kesulitan soal ini adalah **mudah**. Penyelesaian soal ini dengan pengolahan sedikit dan memakai bentuk

$$\sqrt{a+b\pm 2\sqrt{ab}} = \sqrt{a}\pm\sqrt{b}$$

dengan $a \geq b$.

11. Misalkan $f_n$ menyatakan faktor persekutuan terbesar dari $\underbrace{111\cdots 111}_{\text{sebanyak } 2020}$ dan $\underbrace{111\cdots 111}_{\text{sebanyak } n}$ untuk setiap bilangan asli $n$. Tentukan banyak bilangan asli $n$ yang kurang dari 2020 sehingga $f_n > 1$. **(4 poin)**

**Jawab:** $\boxed{\mathbf{1219}}$

Tinjau bahwa

$$\begin{aligned}
f_n &= FPB\left(\underbrace{111\cdots 111}_{\text{sebanyak } 2020}, \underbrace{111\cdots 111}_{\text{sebanyak } n}\right) \\
&= \frac{1}{9}FPB\left(\underbrace{999\cdots 999}_{\text{sebanyak } 2020}, \underbrace{999\cdots 999}_{\text{sebanyak } n}\right) \\
f_n &= \frac{1}{9}FPB\big(10^{2020}-1, 10^n-1\big)
\end{aligned}$$

Jika $a, m, n$ bilangan asli, maka

$$FPB\big(a^m-1, a^n-1\big) = a^{FPB(m,n)}-1$$

Maka kita peroleh

$$f_n = \frac{10^{FPB(2020,n)}-1}{9}$$

Agar $f_n > 1$, haruslah $FPB(2020, n) > 1$. Jika $FPB(2020, n) = 1$ dan $2020 = 2^2 \cdot 5 \cdot 101$, maka banyak bilangan asli $n$ yang demikian adalah

$$\phi(2020) = 2020\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right)\left(1 - \frac{1}{101}\right) = 2020 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{100}{101} = 800$$

Sehingga banyak bilangan asli $n$ yang kurang dari 2020 sehingga $FPB(2020, n) > 1$ adalah $2019 - 800 = 1219$. Jadi, banyak bilangan asli $n$ yang memenuhi $f_n > 1$ adalah $\boxed{1219}$.

> **Remark.** Sebanyak 3 peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Demikian tingkat kesulitan soal ini adalah **sangat sulit**. Salah satu teorema yang terkenal adalah
>
> $$FPB\big(a^m - 1, a^n - 1\big) = a^{FPB(m,n)-1}$$
>
> dengan $a, m, n$ bilangan asli. Teorema lain. Misalkan $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$ yang merupakan bentuk faktorisasi prima dari $n$. Maka banyak bilangan asli $m \le n$ sehingga $FPB(m, n) = 1$ dengan $n$ bilangan asli adalah
>
> $$\phi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$$

12. Tentukan banyak pasangan bilangan bulat berbeda tak nol $(x, y)$ yang memenuhi

$$x + \frac{1}{y} = y + \frac{1}{x}$$

**(1 poin)**

**Jawab:** $\boxed{\mathbf{2}}$

Kalikan kedua ruas dengan $xy$, kita peroleh $x^2y + x = xy^2 + y$ yang ekuivalen dengan

$$x^2y - xy^2 = y - x \Longrightarrow xy(x - y) = y - x$$

yang menyimpulkan $xy = -1$. Demikian pasangan $(x, y)$ yang mungkin adalah $(1, -1)$ dan $(-1, 1)$. Cek kembali, memenuhi. Jadi, banyak pasangan bilangan bulat berbeda tak nol $(x, y)$ adalah $\boxed{2}$.

> **Remark.** Sebanyak 25 peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Demikian tingkat kesulitan soal ini adalah **sulit-sedang**. Kesalahan yang dilakukan peserta antara lain pasangan $(x, y)$ dianggap sama dengan pasangan $(y, x)$. Sehingga banyak pasangan $(x, y)$ yang memenuhi adalah 1.

13. Sebanyak 3 bilangan berbeda diambil dari himpunan $\{2000, 2001, 2002, 2003, \cdots, 2020\}$. Jika peluang bahwa hasil kali ketiga bilangan tersebut tidak habis dibagi 9 dapat dinyatakan dalam bentuk pecahan sederhana $\frac{a}{b}$, tentukan nilai $a + b$.

**(2 poin)**

**Jawab:** $\boxed{\mathbf{307}}$

Kita bagi menjadi 2 kasus. Tinjau banyak bilangan yang habis dibagi 3 tetapi tidak habis dibagi 9 dari himpunan tersebut adalah 5 bilangan dan banyak bilangan yang tidak habis 3 ada sebanyak 14 bilangan. Semestanya adalah

$$C_3^{21} = \frac{21!}{18!3!} = \frac{21 \cdot 20 \cdot 19}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 1330$$

**Kasus 1 : Tidak ada 3 bilangan yang diambil habis dibagi 3**

Banyak cara memilihnya adalah $C_3^{14} = \frac{14!}{11!3!} = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 364$.

**Kasus 2 : Satu bilangan habis dibagi 3 dan dua bilangan lainnya tidak habis dibagi 3**

Banyak cara memilihnya adalah

$$C_1^5 \cdot C_2^{14} = \frac{5!}{4!1!} \cdot \frac{14!}{12!2!} = 5 \cdot \frac{14 \cdot 13}{2} = 455$$

Sehingga peluang yang diminta adalah

$$\frac{364 + 455}{1330} = \frac{819}{1330} = \frac{117}{190}$$

Demikian $a = 117$ dan $b = 190$ yang berarti $a + b = \boxed{307}$.

> **Remark.** Sebanyak 3 peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Demikian tingkat kesulitan soal ini adalah **sangat sulit**. Dalam soal demikian, kita dapat memecah soal tersebut menjadi beberapa kasus untuk mempermudah pengerjaan.

14. Suatu bilangan asli $x$ dikatakan *mantap* jika

$$\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \cdots}}}} + \sqrt{x - \sqrt{x - \sqrt{x - \sqrt{x - \cdots}}}}$$

bilangan asli. Tentukan banyak bilangan asli $x$ yang mantap dengan $1 \leq x \leq 2020$.

**(3 poin)**

**Jawab:** $\boxed{\mathbf{21}}$

Misalkan

$$\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \cdots}}}} + \sqrt{x - \sqrt{x - \sqrt{x - \sqrt{x - \cdots}}}} = n$$

Jelas bahwa $n$ bilangan asli. Misalkan $k = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \cdots}}}}$. Dengan menguadratkannya, kita peroleh

$$k^2 = x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \cdots}}}} = x + k$$

yang berarti $x = k^2 - k$. Misalkan $l = \sqrt{x - \sqrt{x - \sqrt{x - \sqrt{x - \cdots}}}}$. Dengan cara yang serupa, kita peroleh bahwa $x = l^2 + l$. Dapat kita simpulkan bahwa $k^2 - k = l^2 + l$ yang setara dengan

$$k + l = k^2 - l^2 = (k + l)(k - l)$$

Karena $k + l \neq 0$, maka $k - l = 1$ yang berarti $k = l + 1$. Maka $n = k + l = l + 1 + l = 2l + 1$. Tinjau bahwa $x = l^2 + l$ ekuivalen dengan $0 = l^2 + l - x$ merupakan persamaan kuadrat variabel $x$. Dengan rumus $ABC$,

$$l_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(1)(-x)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4x}}{2}$$

Karena haruslah $l \geq 0$, maka

$$l = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4x}}{2}$$

Demikian kita peroleh $n = 2l + 1 = \sqrt{1 + 4x}$ yang berarti $1 + 4x$ harus kuadrat dari suatu bilangan ganjil (demikian juga $n$ bilangan ganjil). Tinjau bahwa

$$1 + 4 \cdot 1 = 5 \leq n^2 = 1 + 4x \leq 1 + 4 \cdot 2020 = 8081$$

yang berarti $\sqrt{5} \leq n \leq \sqrt{8081}$. Karena $n$ bilangan asli, maka $3 \leq n \leq 89$. Demikian bilangan ganjil $n$ yang memenuhi adalah $n = 3, 5, 7, 9, \cdots, 89$ yang berarti ada $\boxed{44}$.

> **Remark.** Sebanyak 17 peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Demikian tingkat kesulitan soal ini adalah **sulit**. Kita dapat memisalkan suatu ekspresi kemudian mengubahnya dalam bentuk sederhana. Hal ini sangat berguna dalam pemecahan suatu soal dari bentuk kompleks menjadi bentuk yang lebih sederhana.

15. Tentukan nilai dari

$$\frac{\frac{1}{1} + \frac{1}{2}}{\frac{1}{1} - \frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}} + \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}} + \cdots + \frac{\frac{1}{2019} + \frac{1}{2020}}{\frac{1}{2019} - \frac{1}{2020}}$$

**(2 poin)**

**Jawab:** $\boxed{\mathbf{4080399}}$

Perhatikan bahwa

$$\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{a+1}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{a+1}} = \frac{\frac{a+1+a}{a(a+1)}}{\frac{a+1-a}{a(a+1)}} = 2a + 1$$

Kita dapatkan

$$\begin{aligned}
S &= \frac{\frac{1}{1} + \frac{1}{2}}{\frac{1}{1} - \frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}} + \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}} + \cdots + \frac{\frac{1}{2019} + \frac{1}{2020}}{\frac{1}{2019} - \frac{1}{2020}} \\
&= 2 \cdot 1 + 1 + 2 \cdot 2 + 1 + 2 \cdot 3 + 1 + \cdots + 2 \cdot 2019 + 1 \\
&= 2(1 + 2 + 3 + \cdots + 2019) + 2019 \\
&= 2 \cdot \frac{2019 \cdot 2020}{2} + 2019 \\
&= 2019 \cdot 2020 + 2019 \\
&= 2019(2020 + 1) \\
&= 2019 \cdot 2021 \\
S &= 4080399
\end{aligned}$$

Demikian $\frac{\frac{1}{1} + \frac{1}{2}}{\frac{1}{1} - \frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}} + \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}} + \cdots + \frac{\frac{1}{2019} + \frac{1}{2020}}{\frac{1}{2019} - \frac{1}{2020}} = \boxed{4080399}$.

> **Remark.** Sebanyak 42 peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Demikian tingkat kesulitan soal ini adalah **mudah**. Ide penyelesaiannya yaitu dengan menyederhanakan bentuk
>
> $$\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{a+1}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{a+1}}$$
>
> sehingga kita memperoleh kalkulasi/perhitungan yang lebih sederhana.

16. Diberikan $a, b, c, d$ memenuhi sistem persamaan

$$\begin{aligned} 2ab + a + b &= 2 \\ 2bc + b + c &= 1 \\ 2cd + c + d &= 4 \end{aligned}$$

Tentukan nilai dari $2ad + a + d$. **(1 poin)**

**Jawab:** $\boxed{7}$

Perhatikan pada $2ab + a + b = 2$. Dengan mengalikan kedua ruas dengan 2 lalu ditambah 1, maka

$$5 = 4ab + 2a + 2b + 1 = (2a + 1)(2b + 1)$$

Dengan cara yang serupa, kita peroleh

$$(2b + 1)(2c + 1) = 3 \quad \text{dan} \quad (2c + 1)(2d + 1) = 9$$

Dengan mengalikannya,

$$\begin{aligned} (2a + 1)(2b + 1) \cdot (2b + 1)(2c + 1) \cdot (2c + 1)(2d + 1) &= 5 \cdot 3 \cdot 9 \\ (2a + 1)(2d + 1) \cdot \left((2b + 1)(2c + 1)\right)^2 &= 5 \cdot 3 \cdot 9 \\ (2a + 1)(2d + 1) \cdot 3^2 &= 5 \cdot 3 \cdot 9 \\ 4ad + 2a + 2d + 1 &= 15 \\ 4ad + 2a + 2d &= 14 \\ 2ad + a + d &= 7 \end{aligned}$$

Jadi, $2ad + a + d = \boxed{7}$.

> **Remark.** Sebanyak 32 peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Demikian tingkat kesulitan soal ini adalah **sedang**. Ide penyelesaiannya adalah dengan memfaktorkan. Kita dapat mencari nilai yang diminta tanpa mencari masing-masing nilai $a, b, c, d$.

17. Diberikan segitiga $ABC$ serta titik $D$ dan $E$ berturut-turut berada pada sisi $BC$ dan $AC$. Titik $F$ merupakan perpotongan $BE$ dan $AD$. Misalkan $[ABC]$ menyatakan luas segitiga $ABC$. Didefinisikan serupa untuk $[ABE], [BAD], [BFD]$, dan $[ABF]$. Jika $5[BEC] = 2[ABE] \times [ABC]$ dan nilai dari $\dfrac{[ABF] \times [BAD]}{[BFD]}$ dapat dinyatakan dalam bentuk pecahan sederhana $\dfrac{a}{b}$, tentukan nilai $10a + b$. **(4 poin)**

**Jawab:** $\boxed{52}$

Perhatikan contoh sederhana berikut.

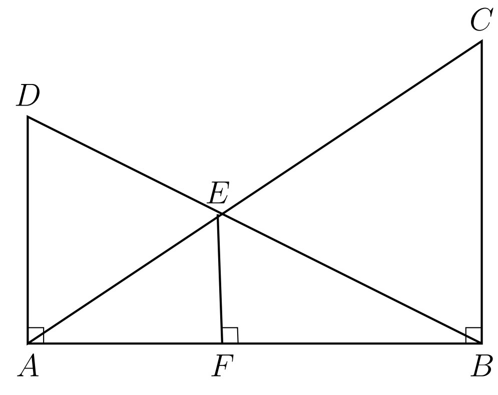
Kita tahu bahwa $AD \parallel EF \parallel BC$. Maka $\triangle ABD$ sebangun dengan $\triangle EFB$. Berarti $\dfrac{EF}{DA} = \dfrac{FB}{AB}$.

Perhatikan bahwa $\triangle ABC$ sebangun dengan $\triangle AFE$. Berarti $\dfrac{EF}{CB} = \dfrac{AF}{AB}$.

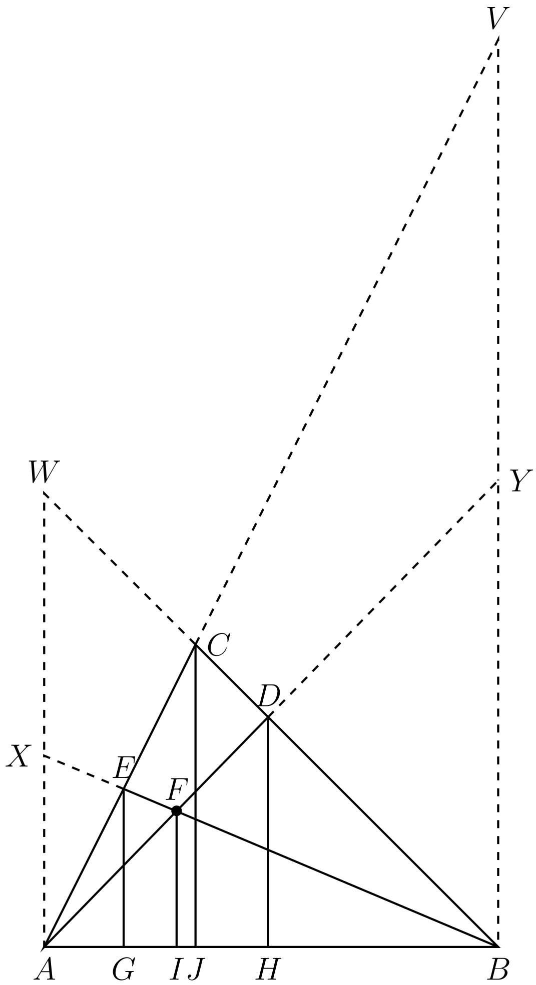
Sehingga kita dapatkan

$$\frac{EF}{DA} + \frac{EF}{CB} = \frac{FB + AF}{AB} = \frac{AB}{AB} = 1$$

yang berarti $\dfrac{1}{DA} + \dfrac{1}{CB} = \dfrac{1}{EF}$. $\ldots (*)$



Tarik garis tinggi dari $D, F, E, C$ seperti pada gambar. Perpanjang $BE, AD, AC, BC$ berturut-turut hingga $X, Y, V, W$ sehingga $XA, WA, YB, VB$ masing-masing tegak lurus terhadap $AB$. Misalkan luas $DFEC$ adalah $x$ satuan luas.




Dengan menggunakan fakta pada $(*)$, maka kita peroleh

$$\frac{1}{EG} = \frac{1}{AX} + \frac{1}{BV}$$
$$\frac{1}{FI} = \frac{1}{AX} + \frac{1}{BY}$$
$$\frac{1}{CJ} = \frac{1}{AW} + \frac{1}{BV}$$
$$\frac{1}{DH} = \frac{1}{AW} + \frac{1}{BY}$$

Sehingga kita peroleh bahwa

$$\frac{1}{EG} + \frac{1}{DH} = \frac{1}{FI} + \frac{1}{CJ}$$

Perhatikan bahwa

$$\frac{1}{EG} = \frac{AB}{2[ABE]}$$
$$\frac{1}{DH} = \frac{AB}{2[ABD]}$$
$$\frac{1}{FI} = \frac{AB}{2[AFB]}$$
$$\frac{1}{CJ} = \frac{AB}{2[ABC]}$$

Subtitusikan. Didapatkan

$$\frac{AB}{2[ABE]} + \frac{AB}{2[ABD]} = \frac{AB}{2[AFB]} + \frac{AB}{2[ABC]}$$

Kalikan kedua ruas dengan $\frac{2}{AB}$, kita dapatkan

$$\frac{1}{[ABE]} + \frac{1}{[ABD]} = \frac{1}{[AFB]} + \frac{1}{[ABC]}$$
$$\frac{1}{[ABE]} - \frac{1}{[ABC]} = \frac{1}{[AFB]} - \frac{1}{[ABD]}$$
$$\frac{[ABC] - [ABE]}{[ABE] \times [ABC]} = \frac{[ABD] - [AFB]}{[AFB] \times [ABD]}$$
$$\frac{[BEC]}{[ABE] \times [ABC]} = \frac{[BDF]}{[ABF] \times [BAD]}$$
$$\frac{2}{5} = \frac{[BDF]}{[ABF] \times [BAD]}$$
$$\frac{5}{2} = \frac{[ABF] \times [BAD]}{[BDF]}$$

Demikian $a = 5$ dan $b = 2$ yang berarti $10a + b = \boxed{52}$.

> **Remark.** Sebanyak 6 peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Demikian tingkat kesulitan soal ini adalah **sangat sulit**. Alternatif penyelesaian dalam soal ini yaitu dengan perbandingan luas. *Banyak jalan menuju Roma.*

18. Tentukan banyak bilangan bulat $x$ sehingga $\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$ bilangan bulat. **(2 poin)**

**Solusi:** $\boxed{2}$

Misalkan $\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=k$ dengan $k$ bilangan bulat tak negatif, maka $x^2+x+1=k^2$. Kalikan kedua ruas dengan 4, kita peroleh

$$\begin{aligned}4x^2+4x+4&=4k^2\\(2x+1)^2+3&=(2k)^2\\3&=(2k)^2-(2x+1)^2\\3&=(2k+2x+1)(2k-2x-1)\end{aligned}$$

- Jika $2k+2x+1=3$ dan $2k-2x-1=1$, dengan mengurangi kedua persamaan tersebut diperoleh $4x+2=2$ yang berarti $x=0$.
- Jika $2k+2x+1=1$ dan $2k-2x-1=3$, dengan mengurangi kedua persamaan tersebut diperoleh $4x+2=-2$ yang berarti $x=-1$.
- Jika $2k+2x+1=-1$ dan $2k-2x-1=-3$, dengan mengurangi kedua persaamaan tersebut diperoleh $4x+2=2$ yang berarti $x=0$.
- Jika $2k+2x+1=-3$ dan $2k-2x-1=-1$, dengan mengurangi kedua persamaan tersebut diperoleh $4x+2=-2$ yang berarti $x=-1$.

Cek semua nilai $x$, ternyata memenuhi. Demikian banyak bilangan bulat $x$ yang memenuhi adalah $\boxed{2}$

> **Remark.** Sebanyak 21 peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Demikian tingkat kesulitan soal ini adalah **sedang-sulit**. Salah satu tips untuk memecahkan soal aljabar yaitu dengan tidak ragu langkah apa yang kita pikirkan, contohnya mengekspansikan bentuk tersebut. Sebagai contoh, mengekspansikan $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$ sehingga mendapatkan bentuk yang lebih sederhana.

19. Tentukan tiga digit terakhir dari

$$\frac{1^3+2^3}{1^2-1\cdot2+2^2}+\frac{2^3+3^3}{2^2-2\cdot3+3^2}+\frac{3^3+4^3}{3^2-3\cdot4+4^2}+\cdots+\frac{2019^3+2020^3}{2019^2-2019\cdot2020+2020^2}$$

**(3 poin)**

**Jawab:** $\boxed{\mathbf{399}}$

Tinjau bahwa

$$\frac{a^3+b^3}{a^2-ab+b^2}=\frac{(a+b)\big(a^2-ab+b^2\big)}{a^2-ab+b^2}=a+b$$

Demikian ekspresi pada soal ekuivalen dengan

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2019}\frac{k^3+(k+1)^3}{k^2-k(k+1)+(k+1)^2}&=(1+2)+(2+3)+(3+4)+\cdots+(2019+2020)\\&=(1+3+5+7+\cdots+4039)-1\end{aligned}$$

Demikian

$$\begin{aligned}(1+3+5+7+\cdots+4039)-1&=\left(\frac{4039+1}{2}\right)^2-1\\&=2020^2-1\\&\equiv 20^2-1 \pmod{1000}\\&\equiv 400-1 \pmod{1000}\\&\equiv 399 \pmod{1000}\end{aligned}$$

Jadi, tiga digit terakhir yang diminta adalah $\boxed{399}$.

> **Remark.** Sebanyak 26 peserta berhasil menjawab soal dengan benar. Demikian tingkat kesulitan soal ini adalah **sedang**. Ide penyelesaian soal ini adalah
>
> $$a^3+b^3=(a+b)\big(a^2-ab+b^2\big)\implies \frac{a^3+b^3}{a^2-ab+b^2}=a+b$$
>
> Demikian kita peroleh deret yang lebih sederhana serta meninjau sisa pembagian dengan 1000 (atau mengambil modulo 1000) untuk memperolehkan tiga digit terakhir.

20. Diberikan fungsi $f(m,n)$ dengan

$$f(m,n)=\frac{m^{n^2}-m^{(n-2)^2}}{\big(m^{2n-2}+1\big)\big(m^{n-1}+1\big)\big(m^{n-1}-1\big)}$$

untuk setiap bilangan asli $m$ dan $n$. Tentukan angka satuan dari

$$f\big(2022,f(2019,2017)\big)+f\big(f(2018,2020),2019\big)$$

*Catatan :* Perhatikan bahwa $a^{b^c}=a^{(b^c)}$. Sebagai contoh, $3^{2^3}=3^8$ dan $4^{3^2}=4^9$. **(4 poin)**

**Jawab:** $\boxed{8}$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}f(m,n)&=\frac{m^{(n-2)^2}\left(m^{n^2-(n-2)^2}-1\right)}{\big(m^{2n-2}+1\big)\big(m^{2n-2}-1\big)}\\&=\frac{m^{(n-2)^2}\left(m^{n^2-n^2+4n-4}-1\right)}{m^{4n-4}-1}\\&=\frac{m^{(n-2)^2}\big(m^{4n-4}-1\big)}{m^{4n-4}-1}\\f(m,n)&=m^{(n-2)^2}\end{aligned}$$

Kita peroleh $f(2019,2017)=2019^{2015^2}$. Maka

$$f\big(2022,f(2019,2017)\big)=f\left(2022,2019^{2015^2}\right)=2022^{\left(2019^{2015^2}-2\right)^2}\equiv 2^{\left(2019^{2015^2}-2\right)^2} \pmod{10}$$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}2^1&\equiv 1 \pmod{10}\\2^2&\equiv 4 \pmod{10}\\2^3&\equiv 8 \pmod{10}\\2^4&\equiv 6 \pmod{10}\\2^5&\equiv 2 \pmod{10} &&\text{(Berulang)}\end{aligned}$$

Demikian pola tersebut berulang setelah 4 pola. Maka

$$2^{\left(2019^{2015^2}-2\right)^2} \equiv 2^{\left(2019^{2015^2}-2\right)^2 \pmod 4} \pmod{10}$$

Karena $2019 \equiv -1 \pmod 4$, maka $2019^{2015^2} \equiv (-1)^{2015^2} \pmod 4$. Jelas bahwa $2015^2$ bernilai ganjil, maka

$$\left(2019^{2015^2} - 2\right)^2 \equiv \left((-1)^{2015^2}\right)^2 \equiv (-1)^2 \equiv 1 \pmod 4$$

Demikian

$$2^{\left(2019^{2015^2}-2\right)^2} \equiv 2^{\left(2019^{2015^2}-2\right)^2 \pmod 4} \equiv 2^1 \equiv 2 \pmod{10}$$

Berarti $f\big(2022, f(2019,2017)\big) \equiv 2 \pmod{10}$.

Tinjau $f(2018,2020) = 2018^{2018^2}$. Maka

$$f\big(f(2018,2020),2019\big) = f\left(2018^{2018^2}, 2019\right) = \left(2018^{2018^2}\right)^{2017^2} \equiv 8^{2018^2 \cdot 2017^2}$$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} 8^1 &\equiv 8 \pmod{10} \\ 8^2 &\equiv 4 \pmod{10} \\ 8^3 &\equiv 2 \pmod{10} \\ 8^4 &\equiv 6 \pmod{10} \\ 8^5 &\equiv 2 \pmod{10} && \text{(Berulang)} \end{aligned}$$

Demikian pola tersebut berulang setelah 4 pola. Maka

$$8^{2018^2 \cdot 2017^2} \equiv 8^{2018^2 \cdot 2017^2 \pmod 4} \pmod{10}$$

Karena $2018^2 \cdot 2017^2 \equiv 0 \pmod 4$, maka

$$8^{2018^2 \cdot 2017^2} \equiv 8^4 \equiv 6 \pmod{10}$$

Demikian $f\big(f(2018,2020),2019\big) \equiv 6 \pmod{10}$. Sehingga

$$f\big(2022, f(2019,2017)\big) + f\big(f(2018,2020),2019\big) \equiv 2 + 6 \equiv 8 \pmod{10}$$

Jadi, angka satuan yang diminta adalah $\boxed{8}$.

> **Remark.** Sebanyak 5 peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Demikian tingkat kesulitan soal ini adalah **sangat sulit**. Ide penyelesaiannya adalah dengan menyederhanakan bentuk $f(m,n)$ serta meninjau pola angka satuan pada bentuk $a^b$.